

Matematické programování a Modelovací jazyk GAMS

Ing. Tomáš MAUDER
prof. Ing. František KAVIČKA, CSc.
doc. Ing. Josef ŠTĚTINA, Ph.D.



Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně
Energetický ústav
Odbor termomechaniky a techniky prostředí



Obsah

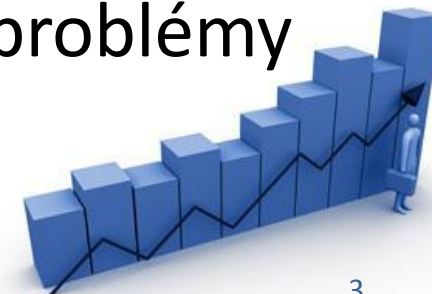
- Optimalizační metody
- Náročnost optimalizačních úloh
- Matematické programování
 - Tvorba matematického modelu
 - Druhy matematických modelů
- Modelovací jazyky
 - GAMS
- Vybrané aplikace



Optimalizace



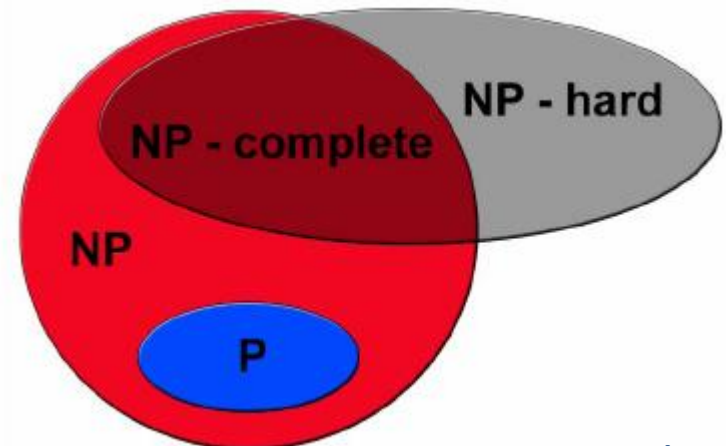
- Metody operačního výzkumu 1909
A. K. Erlang, 1940 R. Watson-Watt
- Optimalizace = hledání nejlepších výsledků pod vlivem určitých okolností
- Minimalizovat výrobní náklady, nebo maximalizovat zisk
- Neexistuje optimalizační metoda, která dokáže efektivně řešit všechny optimalizační problémy (třídu problémů)



Náročnost výpočetních úloh

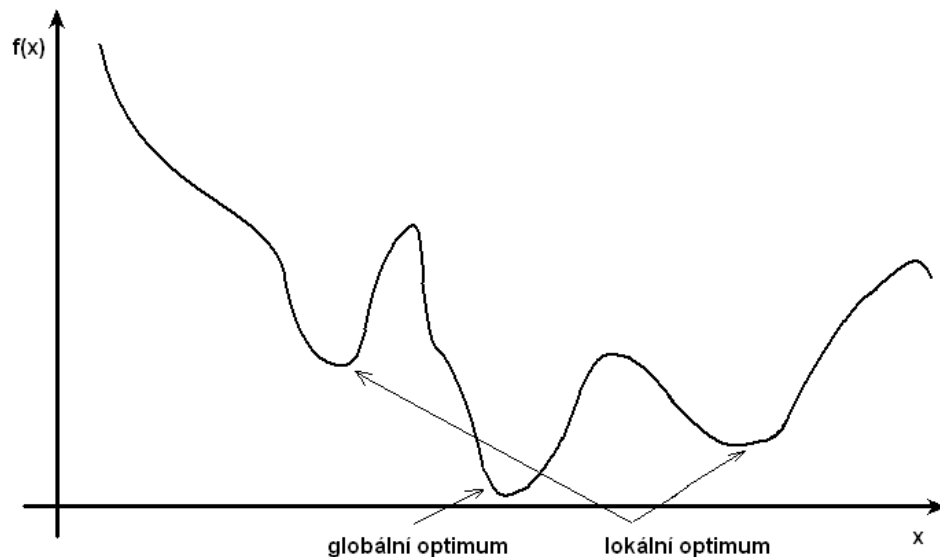
- Rozdělení úloh operačního výzkumu S.A. Cook 1971
 - P (polynomiální)
 - NP (Non-deterministic P)
- Turingův stroj 1937 A. Turing

$$P \stackrel{??}{\subseteq} NP$$



Matematické programování

- Matematické programování = hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných
- Převedení věcného problému do matematického zápisu



- Účelová (kriteriální) funkce
- Omezení



Matematické programování

- Lineární programování
- Nelineární programování
- Celočíselné programování
- (Geometrické programování)

$$\min \{f(\mathbf{x}); \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in X\}$$

- Stochastické programování

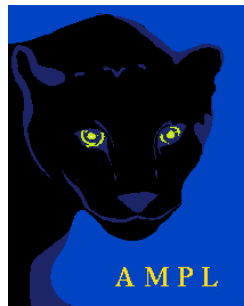
$$\min \{f(\mathbf{x}, \xi); \mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \xi) = 0, \mathbf{x} \in X\}$$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K \quad (\Omega, \Sigma, P)$$



Modelovací jazyky

- GAMS, AMPL, LINDO, MPL,



- Řešič
 - CPLEX, COIN,
 - CONOPT, MINOS, BARON,
- Výměna dat
 - GDX



GAMS (General Algebraic Modeling System)

- Množina $\begin{cases} i = 0 \dots M \\ j = 0 \dots N \end{cases}$
- Parametry $\begin{cases} \dot{q} = \text{const} \\ \lambda = \text{const} \end{cases}$
- Proměnné $\begin{cases} v_z & \text{casting speed} \\ h_{tc} & \text{heat transfer coefficient} \end{cases}$
- Rovnice
 - Účelová funkce $\rightarrow z = \max(v_z)$
 - Omezení $\rightarrow z = \min \{ \max \{ T_{surface,i} - T_{surface,i+1} \} - v_{casting} \}$

$$T_{i,j}^{n+1} = a_0 + a_1 \cos(H_{i,j}^{n+1} w) + b_1 \sin(H_{i,j}^{n+1} w) + \dots$$

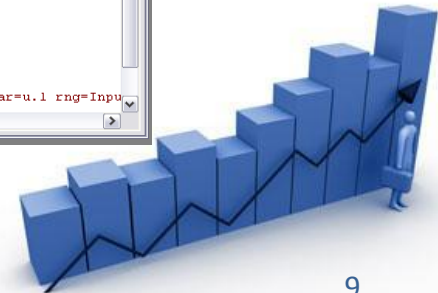
$$+ a_5 \cos(5H_{i,j}^{n+1} w) + b_5 \sin(5H_{i,j}^{n+1} w)$$

$$h_{tc,4} \leq h_{tc,4,max}$$



GAMS

```
gamside: D:\Pistik\Maxwell.gpr
File Edit Search Windows Utilities Model Libraries Help
gdx
D:\Popeta\scheduling\schedulingV.4\scheduling\scheduling1.gms
Maxwell.gms Maxwell.lst scheduling1.gms termo_kandidatni_reseni.gms
;
positive variable
    x(j,n)
    u(j,m)
    uu(j,m)
    xx(j)
;
-----
equations
total_time          total lead time(makespan) - objective function
finish_time         finish time of job j
binary_condition    condition for binary variables
sequential1         sequential operations on different machines
sequential2         sequential operations on different machines
sequential3         sequential operations on different machines
sequential4         sequential operations on one machine
sequential5         sequential operations on one machine
;
total_time .. z =e= sum(j,xx(j));
finish_time(j,n) .. xx(j) =g= x(j,n);
-----
sequential1(m,j) .. u(j,m) + t(j,m) =e= uu(j,m);
sequential2(m,j) .. sum(n,x(j,n)*incidence_matrix3(n,m)) =1= u(j,m);
sequential3(m,j) .. sum(n,x(j,n)*incidence_matrix2(n,m)) =g= uu(j,m);
-----
binary_condition(m,k,p) $(not ord(k) ge ord(p)) .. y(k,p,m) + y(p,k,m) =e= 1 ;
-----
sequential4(m,k,p) $(not ord(k) eq ord(p)) .. uu(k,m) - u(p,m) =1= g*(1-y(k,p,m));
-----
sequential5(m,k,p) $(not ord(k) eq ord(p)) .. uu(k,m) - u(p,m) - (-g-1)*(y(k,p,m)) =g= 1 ;
-----
option limrow = 10000;
option optcr=0 ;
option optca=0 ;
-----
model scheduling_n_jobs /all/ ;
-----
option mip = cplex;
solve scheduling minimizing z using mip;
display x.l,u.l,uu.l,y.l,xx.l,scheduling.resusd,scheduling.iterusd,scheduling.numnz;
-----
execute unload 'scheduling.gdx',x u uu y z xx;
execute 'gdxrw.exe scheduling.gdx SQ=N var=x.l rng=Output!b4 var=u.l rng=Output!b26 var=uu.l rng=Output!b48 var=y rng=Output!o2 var=z rng=Output!b2 var=u.l rng=Inpu
```



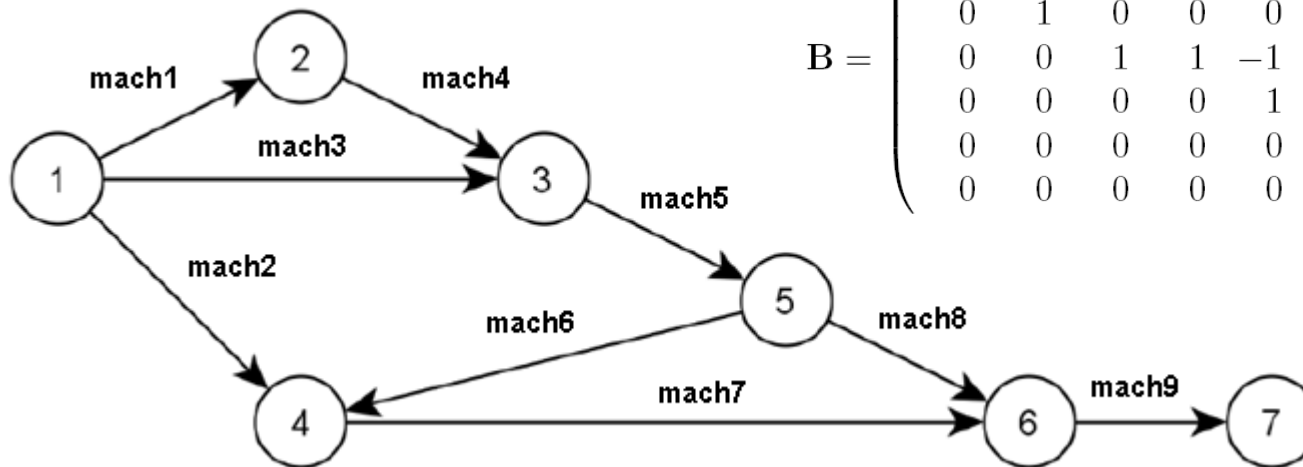
Vybrané aplikace

- Rozvrhování výroby
- Míchání oceli
- Model visko-elastického prvku
- Model rozpočtu
- Optimalizace ZPO



Rozvrhování výroby (scheduling) **MIP**

	mach1	mach2	mach3	mach4	mach5	mach6	mach7	mach8	mach9
t_{j1}	11	9	9	5	5	12	1	12	13
t_{j2}	11	1	7	13	12	6	15	14	1
t_{j3}	15	6	8	12	1	9	8	5	10
t_{j4}	10	4	5	13	13	9	15	14	4
t_{j5}	11	15	4	9	2	15	11	1	9
t_{j6}	2	2	12	5	1	5	6	5	15
t_{j7}	15	7	5	3	3	10	7	7	11
t_{j8}	5	10	4	3	9	2	7	14	4
t_{j9}	12	6	5	14	10	10	7	2	9
t_{j10}	11	14	13	1	9	14	7	11	8



$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rozvrhování výroby MIP

$$z_{\min} = \min \sum_{i=1}^n x_{i,q} \quad (z_{\min} = \min(\max_i x_{i,q}))$$

$$x_{i,q} \geq x_{i,k}$$

$$x_{i,j}^- + t_{i,j} = x_{i,j}^+$$

$$x_{i,h} \leq x_{i,j}^-$$

$$x_{i,p} \geq x_{i,j}^+$$

$$\delta_{l,g,j} + \delta_{l,g,j} = 1$$

$$x_{l,j}^+ - x_{g,j}^- \leq G(1 - \delta_{l,g,j})$$

$$x_{l,j}^+ - x_{g,j}^- - (-G - 1)\delta_{l,g,j} \geq 1$$

$$x_{i,j}^- \geq 0$$

$$x_{i,j}^+ \geq 0$$

$$x_{i,k} \geq 0$$

$$\delta_{l,g,j} \in \{0, 1\}$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, q$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, m \quad 1 \leq l, g \leq n, l \neq g$$

$$j = 1, \dots, m \quad 1 \leq l, g \leq n, l \neq g$$

$$j = 1, \dots, m \quad 1 \leq l, g \leq n, l \neq g$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

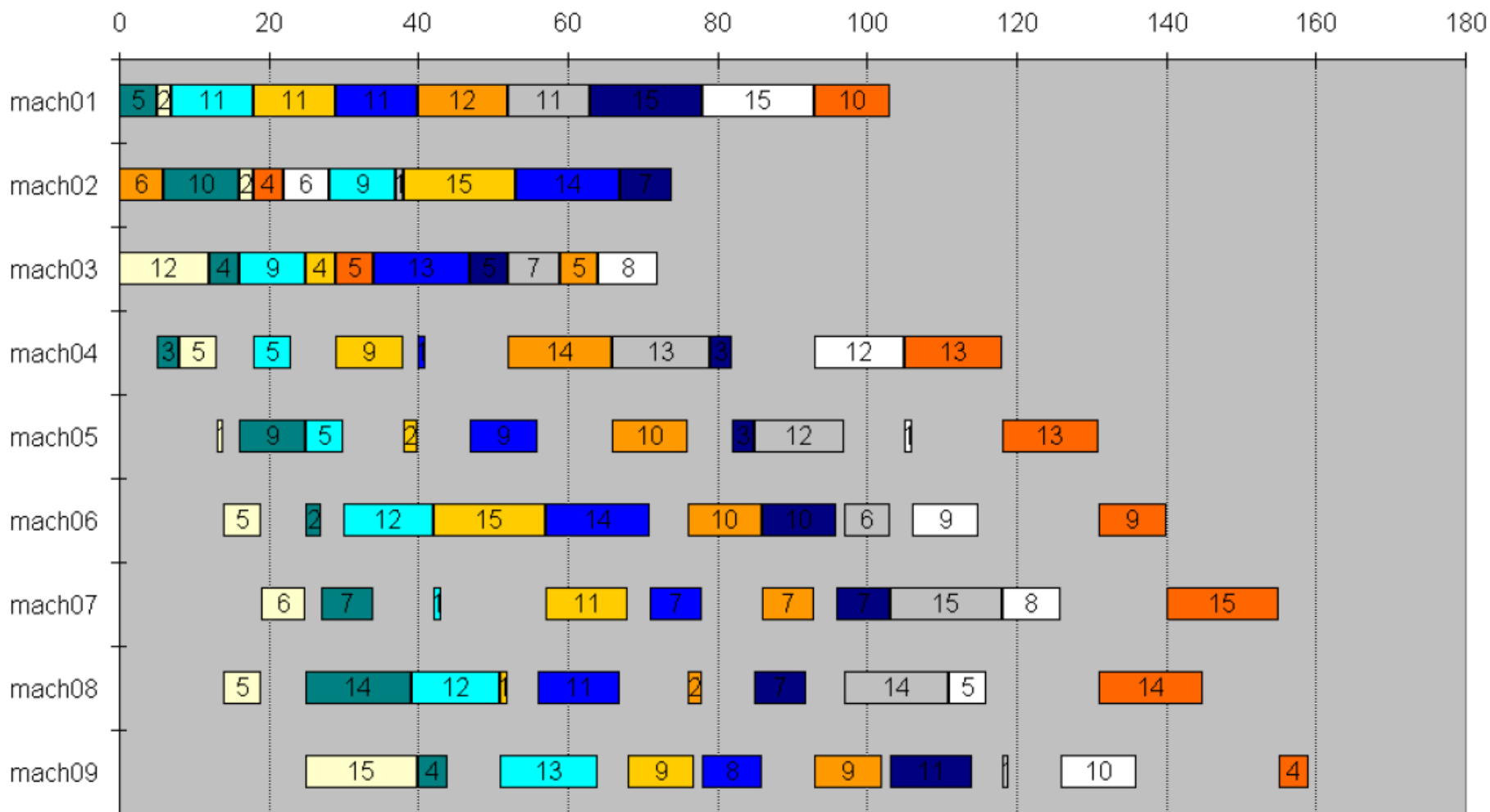
$$j = 1, \dots, m \quad 1 \leq l, g \leq n, l \neq g$$



Rozvrhování výroby MIP



H. L. Gantt



Míchání oceli (melt control problem)

NLP



Označení	Skupina	C	Mn	Si	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	V	Ti	Al	Nb
11325	2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,020	0,000
		0,100	0,450	0,050	0,020	0,020	0,300	0,300	0,300	0,080	0,100	0,005	0,070	0,060
21026	5	0,130	0,950	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,030	0,000	0,020	0,000
		0,170	1,200	0,400	0,035	0,020	0,300	0,400	0,200	0,080	0,060	0,002	0,060	0,030
31087	3	0,180	1,350	0,150	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,020	0,000
		0,200	1,550	0,250	0,030	0,020	0,200	0,300	0,200	0,080	0,002	0,002	0,060	0,060
11500	4	0,240	0,450	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,020	0,000
		0,300	0,650	0,275	0,015	0,020	0,300	0,300	0,250	0,080	0,100	0,050	0,060	0,060
13180	6	0,700	0,900	0,150	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		0,800	1,200	0,350	0,035	0,02	0,250	0,400	0,300	0,100	0,200	0,100	0,060	0,050

Označení	Skupina	C _{eq}	C	Mn	Si	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	V	Ti	Al	Nb	Tsol	Tlik
11325	2	0,067	0,050	0,225	0,025	0,010	0,010	0,150	0,150	0,150	0,040	0,050	0,0025	0,045	0,030	1499,8	1529,8
21026	5	0,235	0,150	1,075	0,300	0,0175	0,010	0,150	0,200	0,100	0,040	0,045	0,001	0,040	0,015	1451,4	1514,2
31087	3	0,275	0,190	1,450	0,200	0,015	0,010	0,100	0,150	0,100	0,040	0,010	0,001	0,040	0,030	1438,7	1510,6
11500	4	0,326	0,270	0,550	0,275	0,015	0,010	0,150	0,150	0,125	0,040	0,050	0,025	0,040	0,030	1423,2	1507,4
13180	6	0,826	0,75	1,050	0,250	0,0175	0,010	0,125	0,200	0,150	0,050	0,100	0,050	0,040	0,025	1322,7	1467,7



Míchání oceli NLP

$$z_{min} = \min \left(\sum add_{component} + \sum add_{steel} \right)$$

$$T_{likvidus} = 1536 - 8wtC - 7,6wtSi - 3,9wtMn - 33,4wtP - \\ -38wtS - 3,7wtCu - 3,1wtNi - 1,3wtCr - 3,6wtAl$$

$$T_{likvidus} \leq T_{steel}$$

$$comp_{i,min} \leq comp_i \leq comp_{i,max}$$

$$m = m_0 \sum m_i$$

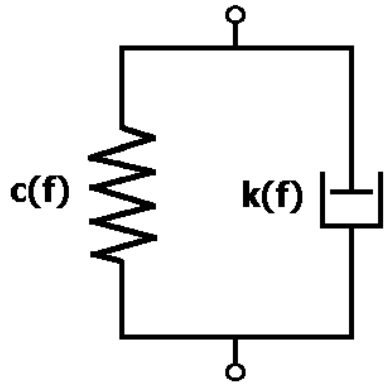
$$T_{steel} = \frac{c_0 m_0 T_0 + \sum c_i m_i T_i}{mc}$$

$$comp_C = 0$$

$$m = m_0 + \sum m_i$$



Optimalizace visko-elastického prvku pro spalovací motory **NLP**



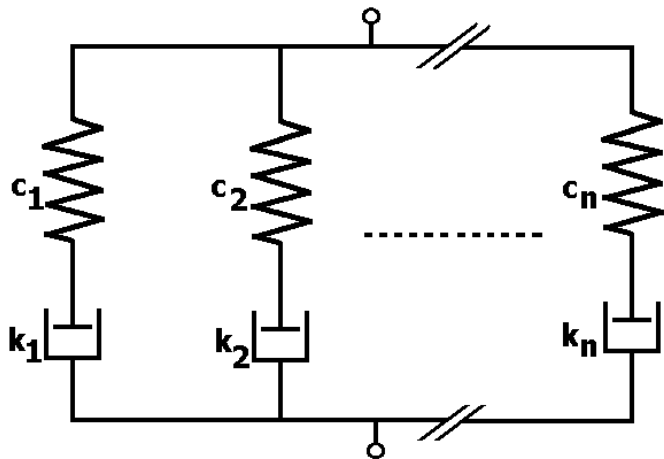
$$G_K = c(f) + j\omega k(f)$$

$$Re_K(f) \quad Im_K(f)$$

$$G_M = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{j\omega k_i} \right)^{-1}$$

$$Re_M(f) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i \omega^2 k_i^2}{\omega^2 k_i^2 + c_i^2}$$

$$Im_M(f) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2 \omega k_i}{\omega^2 k_i^2 + c_i^2}$$



Optimalizace visko-elastického prvku pro spalovací motory **NLP**

$$z_{min} = \min_f \sum_f (Re_M(f) - Re_K(f))^2 / Re_K(f) + (Im_M(f) - Im_K(f))^2 / Im_K(f)$$

$$Re_M(f) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i \omega^2 k_i^2}{\omega^2 k_i^2 + c_i^2}$$

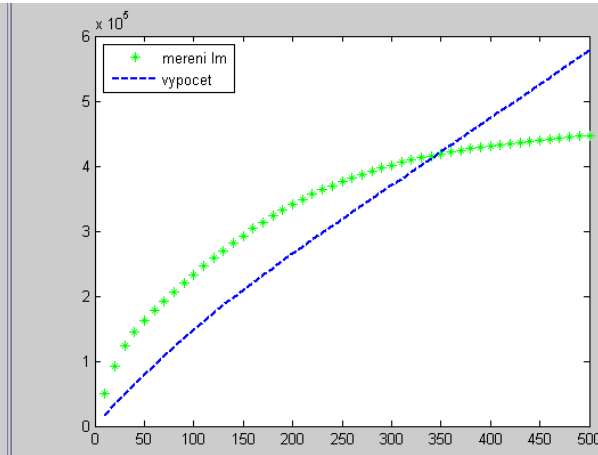
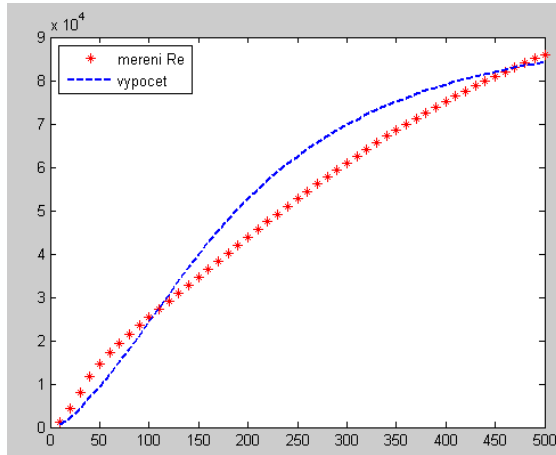
$$Im_M(f) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2 \omega k_i}{\omega^2 k_i^2 + c_i^2}$$

$$c_{i,min} \leq c_i \leq c_{i,max} \quad \forall i = 1..n$$

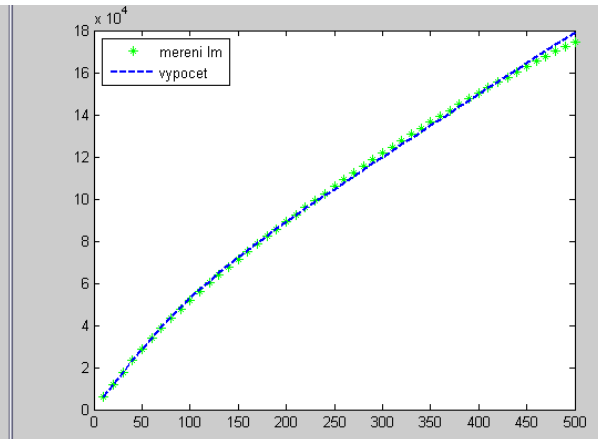
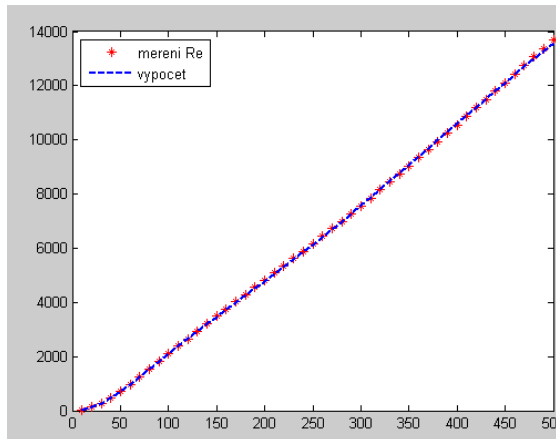
$$k_{i,min} \leq k_i \leq k_{i,max} \quad \forall i = 1..n$$



Optimalizace visko-elastického prvku pro spalovací motory **NLP**



C1=90452.247
C2= 0.000
C3= 5321.087
C4= **1.212253E+20**
K1= 75.838
K2= 118.702
K3=24.210
K4=174.420



C1=31839,303
C2=**-21598,41**
C3=17608,315
C4=4,03E+19
K1=10,211
K2=16,867
K3=17,845
K4=47,359



Matematický model rozpočtu

LP, NLP

$$\mathbf{w}^T \mathbf{A} = \mathbf{y}^T$$

$$z_{max} = \max \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \quad \left(z_{min} = \min \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \right) \quad \left(z_{max} = \max \sum_{l \in L} (y_l) \right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{15} \sum_i y_i$$

$$\sum_j a_{ij} w_j = y_i,$$

$$w_j \geq 0, \quad \sum_i y_i = 1, \quad \sum_j w_j = 1,$$

$$i \in \{1, \dots, 15\}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$



Matematický model rozpočtu

LP, NLP

	ÚM 13210	ÚFI 13220	ÚMTMB 13250	ÚMVI 13280	ÚK 13290	EÚ 13300	ÚST 13310	ÚMsz 13320	ÚVSSaR 13350	ÚPEI 13360	ÚADI 13370	LÚ 13420	ÚAI 13460	ÚJ 13520	LPPT 13620	Celkem
A. Vzdělávací činnost																
Aa. Započítatelné hodiny	80%															
Započítatelné hodiny "Pro1" a "Doc."	19 619	12 102	17 493	9 123	13 584	18 654	27 765	8 707	11 781	9 128	16 611	12 661	17 555	1 956	50,4	197 242
koefficient počtu profesů a docentů	21,8	13,4	19,4	10,1	15,1	20,7	30,9	9,7	13,1	10,1	18,5	14,1	19,5	2,2	0,0	219
Započítatelné hodiny "Ostatní"	44 172	27 132	20 958	22 540	50 274	15 546	58 215	8 778	13 972	7 252	17 858	6 384	26 962	31 688	0	350 730
koefficient počtu odborných asistentů	44,2	27,1	21,0	22,5	50,3	15,5	58,2	8,8	14,0	7,3	17,9	6,4	26,0	31,7	0,0	351
Počet hodin v laboratořích C2a	8 379	613	2 840	62	11 671	1 783	2 436	452	1 305	1 095	3 718	984	4 445	1 323	0	41 116
Počet hodin v laboratořích C2b	0	4 101	494	5 487	3 643	489	10 124	1 199	2 099	306	1 021	236	1 182	0	0	30 380
Počet hodin v laboratořích CL	0	65	0	84	0	0	447	54	76	0	10	3	49	0	0	787
koefficient počtu technických pracovníků	3,8	3,2	2,3	3,4	5,6	2,0	7,2	1,6	2,3	1,3	2,5	1,4	3,0	1,7	0,5	42
Výpočetový mzdový fond pracoviště	1 378 686	860 874	874 021	700 930	1 359 316	800 086	1 896 965	410 030	595 731	389 176	796 660	465 609	977 295	660 321	20 348	12 186 046
Podíl pracoviště dle kritéria Aa	11,31 %	7,06 %	7,17 %	5,75 %	11,15 %	6,67 %	15,57 %	3,36 %	3,19 %	6,54 %	8,02 %	5,42 %	8,02 %	5,42 %	0,17 %	100,00 %
Mzdový řád pracoviště (krit. Aa)	630 480	393 682	399 694	320 539	621 622	365 883	867 401	187 508	272 431	177 972	364 317	212 925	446 922	301 968	9 305	5 572 738
Ab. Studentohodiny	10%															
Počet studentohodin ústavu	446 029,06	208 933,70	295 976,00	134 941,24	253 983,46	185 568,00	317 522,44	63 657,90	95 688,42	58 776,00	116 843,00	48 504,00	204 334,48	107 318,00	40,00	2 538 115,70
Podíl pracoviště dle kritéria Ab	17,57 %	8,23 %	11,66 %	5,32 %	10,01 %	7,31 %	12,51 %	2,51 %	3,77 %	2,32 %	4,60 %	1,91 %	8,04 %	4,23 %	0,00 %	100,00 %
Mzdový řád pracoviště (krit. Ab)	122 414	57 342	81 231	37 035	69 706	50 930	87 145	17 471	26 262	16 131	32 068	13 312	56 080	29 454	11	696 592
Ac. Počet a kvalifikace pracovníků	10%															
Počet bodů ústavu	85	80	80	74	53	71	121	38	45	39	35	49	47	15	10	842
Podíl pracoviště dle kritéria Ac	10,10 %	9,50 %	9,50 %	8,79 %	6,29 %	8,43 %	14,37 %	4,51 %	5,34 %	4,63 %	4,16 %	5,82 %	5,58 %	1,78 %	1,19 %	100,00 %
Mzdový řád pracoviště (krit. Ac)	70 321	66 185	66 185	61 221	43 847	58 739	100 104	31 438	37 229	32 265	28 956	40 538	38 883	12 410	8 273	696 592
B. Výzkum a vývoj																
Ba. Vědecká činnost ústavu	100%															
Koefficient dle "upraveného" vzorce	0,0390636	0,1228381	0,0783470	0,1428983	0,0380841	0,2093773	0,0363117	0,0085449	0,0357887	0,0970914	0,0434650	0,0742574	0,0462872	0,0000000	0,0286456	1,0000000
Podíl pracoviště dle kritéria Ba	3,91 %	12,28 %	7,83 %	14,29 %	3,81 %	20,94 %	3,53 %	0,85 %	3,56 %	9,71 %	4,35 %	7,43 %	4,63 %	0,00 %	2,86 %	100,00 %
Mzdový řád pracoviště (krit. Ba)	32 009	100 655	64 198	117 092	31 206	171 566	28 935	7 002	29 326	79 558	35 616	60 847	37 928	0	23 472	819 411
Výpočetový, současný a nový mzdový fond																
Schválený mzdový fond pracoviště v roce 2007	840 176	593 246	563 566	612 548	728 427	742 538	1 098 326	284 653	366 709	293 997	375 888	337 117	572 934	250 138	54 937	7 715 200
Současný mzdový fond pracoviště (stav od 1.4.2007)	840 176	593 246	563 566	612 548	728 427	742 538	1 098 326	284 653	366 709	293 997	375 888	337 117	572 934	250 138	54 937	7 715 200
Současný mzdový fond - podíl mezi prac [%]	10,89 %	7,69 %	7,30 %	7,94 %	9,44 %	9,62 %	14,24 %	3,69 %	4,75 %	3,81 %	4,87 %	4,37 %	7,43 %	3,24 %	0,71 %	100,00 %
Vypočetný mzdový řád pracoviště	855 224	617 864	611 308	535 887	766 382	647 117	1 083 675	243 419	365 247	305 926	460 956	327 622	579 813	343 831	41 062	7 786 333
Nový mzdový řád pracoviště - fiktivní	850 208	609 658	595 394	561 441	753 730	678 924	1 088 559	257 164	365 735	301 950	432 600	330 787	577 520	312 600	45 687	7 761 956
Základní mzdy od 1. 4. 2008	589 370	433 088	411 640	412 358	310 975	473 352	903 234	265 985	284 786	189 761	214 496	208 818	308 865	248 789	15 733	5 291 250
Nový mzdový fond pracoviště	852 768	611 494	597 187	563 132	756 001	680 969	1 091 837	257 938	366 836	302 859	433 903	331 784	579 260	313 542	45 824	7 785 333
Fiktivní = Současný + 2/3(Vypočetný - Současný)	ÚM 13210	ÚFI 13220	ÚMTMB 13250	ÚMVI 13280	ÚK 13290	EÚ 13300	ÚST 13310	ÚMsz 13320	ÚVSSaR 13350	ÚPEI 13360	ÚADI 13370	LÚ 13420	ÚAI 13460	ÚJ 13520	LPPT 13620	

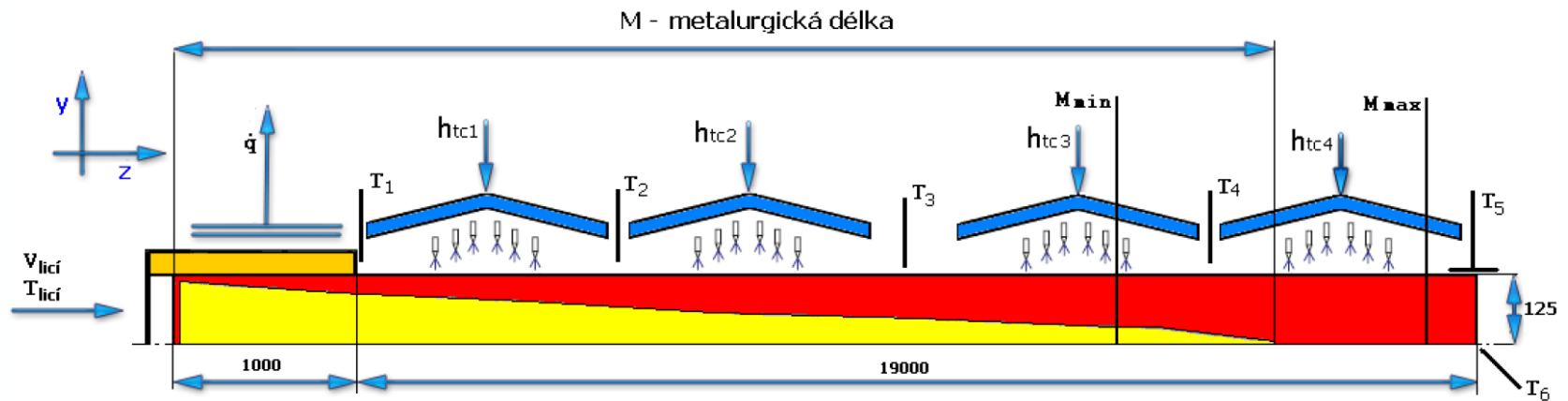
$$w = \{0, 0, 0.895, 0.105\}$$

$$w = \{0, 0.895, 0, 0.105\},$$

$$w = \{0, 0.895, 0, 0.105\}$$



Zjednodušený model ZPO NLP



$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho c \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}$$

$$T = T_{licí}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_{tc} (T_{povrchu} - T_{\infty}) + \sigma \varepsilon (T_{povrchu}^4 - T_{\infty}^4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$



Zjednodušený model ZPO **NLP**

$$z_{min} = \min \{ \max \{ T_{surface,i} - T_{surface,i+1} \} - v_{casting} \}$$

$$v_{z,min} \leq v_z \leq v_{z,max}$$

$$h_{tc,m} \leq h_{tc,max,m} \quad m = 1, \dots, 13$$

$$T_{i,j,k}^0 = T_0 \quad \forall i, j, k$$

$$H_{i,j,k}^0 = H_0 \quad \forall i, j, k$$

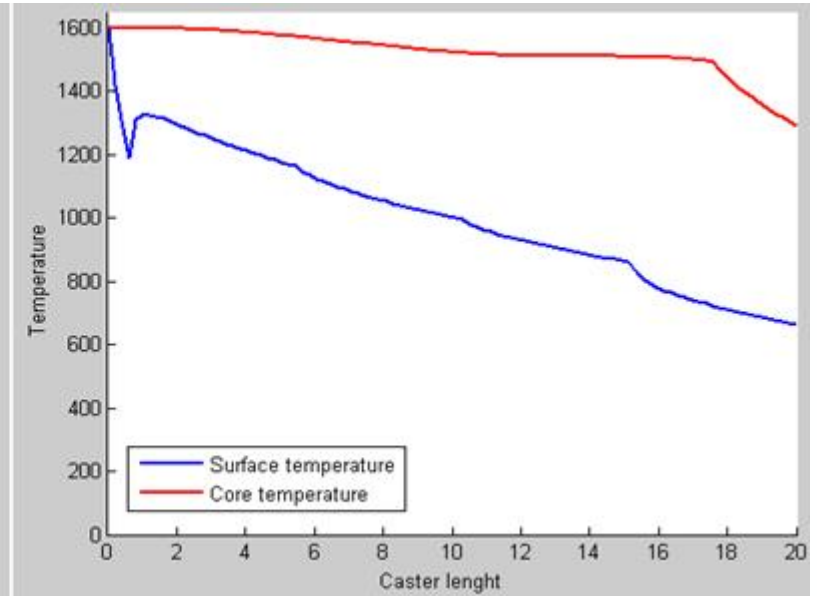
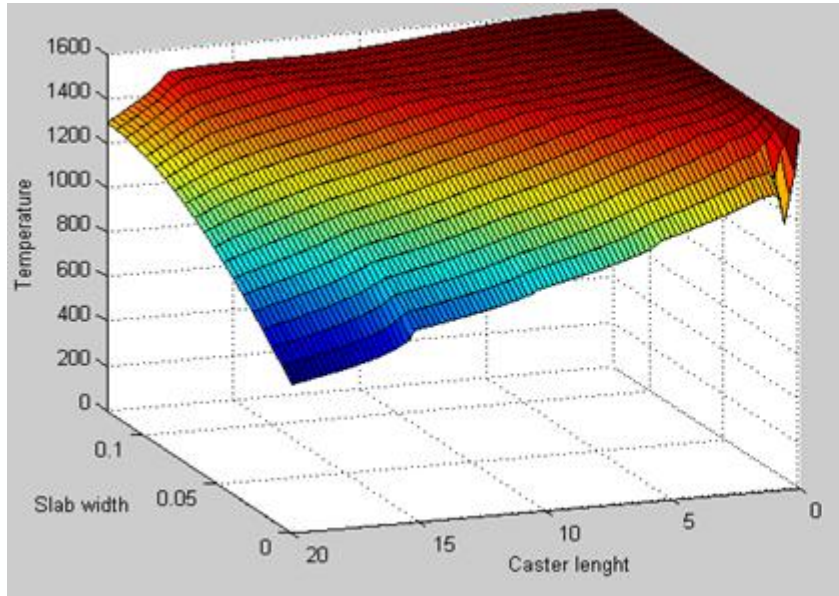
$$T_{i,j,k,min}^{tf} \leq T_{i,j,k}^{tf} \leq T_{i,j,k,max}^{tf} \quad \text{pro vybrané } i, j, k$$

$$M_{min}^{tf} \leq M^{tf} \leq M_{max}^{tf}$$

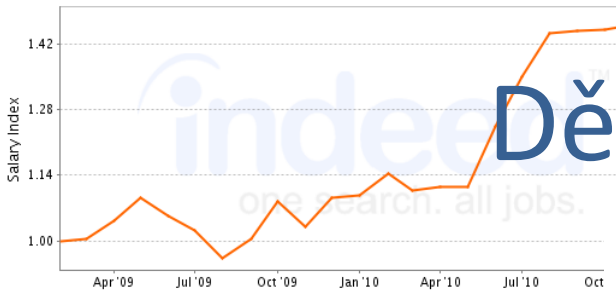
+ Numerický model teplotního pole (metoda sítí)



Zjednodušený model ZPO NLP



Operations Research Analyst



Děkuji za pozornost

